זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha}$$
$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$$

$$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$
$$co\sec=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$
$$2\sin^2\alpha=1-\cos2\alpha$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$$
$$2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

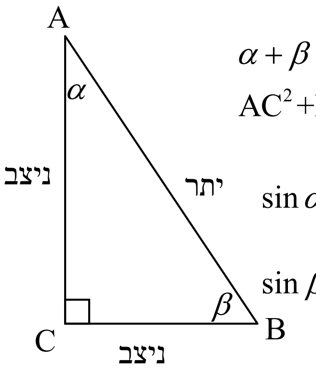
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$S_\Delta=\frac{\text{צלע}\cdot\text{צלע}\cdot\sin\left(\text{הזווית בין הצלעות}\right)}{2}$$
$$S_\square=\frac{\text{אלכסון}\cdot\text{אלכסון}\cdot\sin\left(\text{הזווית בין האלכסונים}\right)}{2}$$
$$S_\Delta=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$$
$$S_\square=\frac{m_1\cdot m_2\cdot\sin\alpha}{2}$$

טריגונומטריה – חזרה כללית

$$\text{סינוס הזווית} = \frac{\text{ניצב מול הזווית}}{\text{היתר}}$$
$$\text{קוסינוס הזווית} = \frac{\text{ניצב ליד הזווית}}{\text{היתר}}$$
$$\text{טנגס הזווית} = \frac{\text{ניצב מול זווית}}{\text{ניצב ליד הזווית}}$$

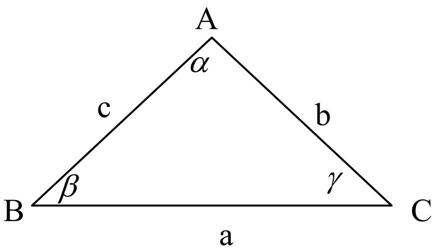


$\alpha + \beta = 90$

$AC^2+BC^2=AB^2 \rightarrow$ משפט פיתגורס

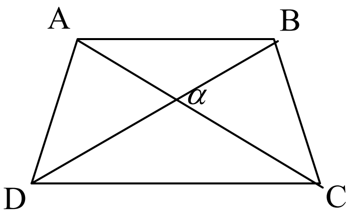
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} \quad \tan\alpha = \frac{BC}{AC}$$
$$\sin\beta = \frac{AC}{AB} \quad \cos\beta = \frac{BC}{AB} \quad \tan\beta = \frac{AC}{BC}$$

שטח המשולש בצורה טריגונומטרית



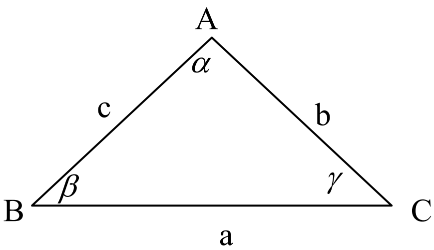
$$S_\Delta = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$
$$S_\Delta = \frac{\text{צלע} \cdot \text{צלע} \cdot \sin\left(\text{הזווית בין הצלעות}\right)}{2}$$
$$S_\Delta = \frac{\text{צלע} \cdot \sin\left(\text{זווית ליד}\right) \cdot \sin\left(\text{זווית ליד}\right)}{2\sin\left(\text{זווית מול}\right)}$$

שטח המרובע בצורה טריגונומטרית



$$S_{\square} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$$
$$S_{\square} = \frac{\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון} \cdot \sin\left(\text{הזווית הכלואה בינהם}\right)}{2}$$

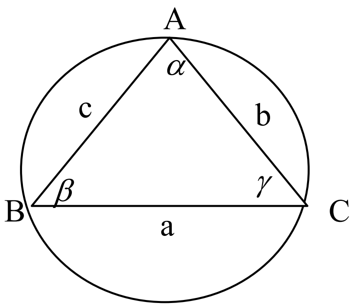
משפט הקוסינוסים



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

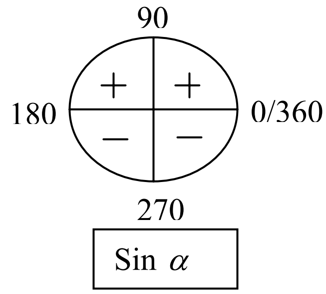
R – רדיוס המעגל **החוסם** את משולש ABC.

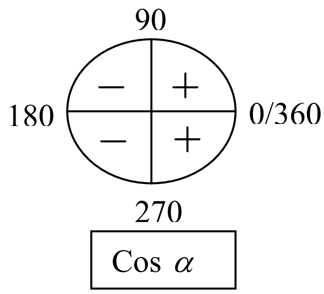
ערכי הפונקציות

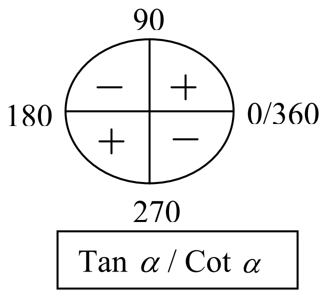
	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
Cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\frac{1}{2} = 0.5$　　$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$　　$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$　　$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$　　$\sqrt{3} \approx 1.732$

סימני הפונקציות ברביעים השונים







	$90-\alpha$	$90+\alpha$	$180-\alpha$	$180+\alpha$	$270-\alpha$	$270+\alpha$	$360-\alpha(=-\alpha)$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tan	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
cot	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

כללים לזכירת הנוסחאות:

1. אם הזווית α מתחברת או מחוסרת מ-90^0 או 270^0, הפונקציה הופכת לקופונקציה. זאת אומרת sin ל- cos , tan ל- cot ולהיפך.
2. אם הזווית α מתחברת או מחוסרת מ-180^0, 360^0 או 0^0, הפונקציה לא משתנה.
3. את הסימן קובעים לפי הפונקציה המקורית, באיזה רביע נמצאת הזווית של הפונקציה המקורית.

דוגמא: $\cos(270-\alpha) = -\sin\alpha$ ← α מתחסרת מ-270, לכן הפונקציה הופכת מ cos ל- sin . זווית של $270-\alpha$ זאת אומרת שהזווית היא ברביע ה-3. ברביע ה-3 ה- cos שלילי ולכן סימן הפונקציה הוא "-".

כלל עזר: כאשר יש לחשב פונקציה טריגונומטרית של זוויות גדולות מחסירים כפולות שלמות של המחזור. (sin, cos - כפולות של 360^0, cot, tan - כפולות של 180^0).

דוגמא:

$$\sin 6000^0 = \sin\left(16\frac{2}{3}\cdot 360^0\right) = \sin\left(16\cdot 360^0 + \frac{2}{3}\cdot 360^0\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\cdot 360^0\right) = \sin\left(240^0\right) =$$

$$= \sin\left(180^0 + 60^0\right) = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

משוואות טריגונומטריות

משוואה	פתרון\ות
$\sin X = \sin\alpha$	$X_1 = \alpha + 360^0 k$ $X_2 = 180^0 - \alpha + 360^0 k$
$\sin X = -\sin\alpha$	$\sin X = \sin(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\sin X = 0$	$X = 180^0 k$
$\sin X = 1$	$X = 90^0 + 360^0 k$
$\sin X = -1$	$X = -90^0 + 360^0 k$
$\cos X = \cos\alpha$	$X_1 = \alpha + 360^0 k$ $X_2 = -\alpha + 360^0 k$
$\cos X = -\cos\alpha$	$\cos X = \cos(180 - \alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית המשלימה ל-180.
$\cos X = 0$	$X = 90^0 + 180^0 k$
$\cos X = 1$	$X = 360^0 k$
$\cos X = -1$	$X = 180^0 + 360^0 k$
$\tan X = \tan\alpha$	$X = \alpha + 180^0 k$
$\tan X = -\tan\alpha$	$\tan X = \tan(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\cot X = \cot\alpha$	$X = \alpha + 180^0 k$
$\cot X = -\cot\alpha$	$\cot X = \cot(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.

פתרון משוואות טריגונומטריות

הנחיות כלליות:

1. יש לנסות להשוות זוויות ולבטא את כל הזוויות בעזרת זווית אחת.
2. יש לנסות להקטין עד כמה שאפשר את מספר הפונקציות הטריגונומטריות.
3. בחלק מהמקרים כדאי להחליף את $\tan X$ ב $\frac{\sin X}{\cos X}$ ואת $\cot X$ ב- $\frac{\cos X}{\sin X}$, אך בשום אופן ין לבצע החלפה זו באופן אוטומטי.
4. יש להמנע מהשימוש בנוסחאות הבאות (**משמאל לימין**):
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
שבדרך כלל מקשות על הפיתרון.
5. בכל פעם שכופלים או מחלקים בביטוי המכיל את הנעלם צריך <u>לוודא</u> שהוא שונה מאפס **ולציין זאת**.
6. בעת איחוד פתרונות יש לוודא שהפיתרון הסופי נמצא ב**תחום ההגדרה** של כל הפונקציות שהיו במשוואה.

<u>משוואה מהצורה</u> **:** $a\sin mX + b\cos mX = c$

על מנת לפתור משוואה מסוג זה ישנם מספר שלבים:

1. חילוק המשוואה כולה ב- **a**.
2. המרת $\frac{b}{a}$ לפונקציית $\tan$, ואותה להמיר ל- $\frac{\sin}{\cos}$.
3. לבצע מכנה משותף של ה- $\cos$.
4. על פי הנוסחא $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\beta \cdot \sin\alpha$ להפוך את כל האגף השמאלי לפונקציה אחת, ולהשוותה לאגף הימני (להפוכו למספרי).

<u>דוגמא:</u>

$$3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 3 / :3$$

$$\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x = 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^0$$

$$\sin 2x - \tan 30^0 \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x - \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cos 2x = 1 / \cdot \cos 30^0$$

$$\cos 30^0 \cdot \sin 2x - \sin 30 \cdot \cos 2x = 1 \cdot \cos 30^0$$

$$\sin\left(2x - 30^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

<u>מערכת של משוואות טריגונומטריות (משוואות עם יותר מנעלם אחד)</u>

על מנת לפתור מערכת משוואות, יש לבטא דבר ראשון את אחד הנעלמים באמצעות השני **ללא שימוש בפונקציות טריגונומטריות**. לאחר מכן יש להציב במשוואה עם הפונקציות ולפתור כרגיל משוואה עם נעלם אחד.

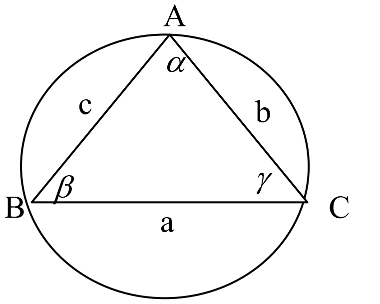
דוגמא:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{4} \\ x + y = 150 \end{cases}$$

$$y = 150 - x \to \sin^2 x - \sin^2(150 - x) = \frac{1}{4}$$

טריגונומטריה להנדסת המישור (גיאומטריה):

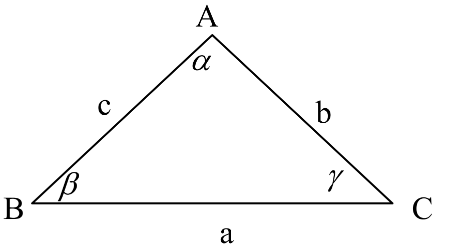
משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

R – רדיוס המעגל **החוסם** את משולש ABC.

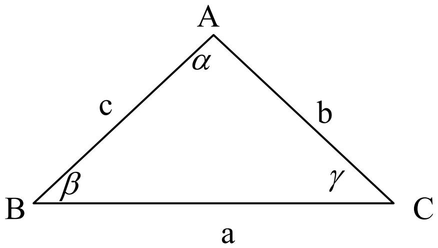
משפט הקוסינוסים



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

שטח המשולש בצורה טריגונומטרית

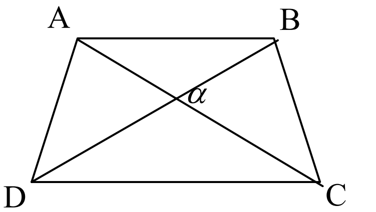


$$S_\Delta=\frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2}=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

$$S_\Delta=\frac{\text{צלע}\cdot\text{צלע}\cdot\sin\left(\text{הזווית בין הצלעות}\right)}{2}$$

$$S_\Delta=\frac{\text{צלע}\cdot\sin\left(\text{זווית ליד}\right)\cdot\sin\left(\text{זווית ליד}\right)}{2\sin\left(\text{זווית מול}\right)}$$

שטח המרובע בצורה טריגונומטרית



$$S_\square=\frac{AC\cdot BD\cdot\sin\alpha}{2}$$

$$S_\square=\frac{\text{אלכסון}\cdot\text{אלכסון}\cdot\sin\left(\text{הזווית הכלואה בינהם}\right)}{2}$$

משפטים שימושיים מגיאומטרייה:

1. במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא תיכון וחוצה זווית הראש.
2. האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה.
3. האלכסונים במלבן חוצים זה את זה.
4. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
5. מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת המפגש של חוצי הזווית של המשולש.
6. הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.
7. במעוין האלכסונים חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה, וחוצים את הזוויות.

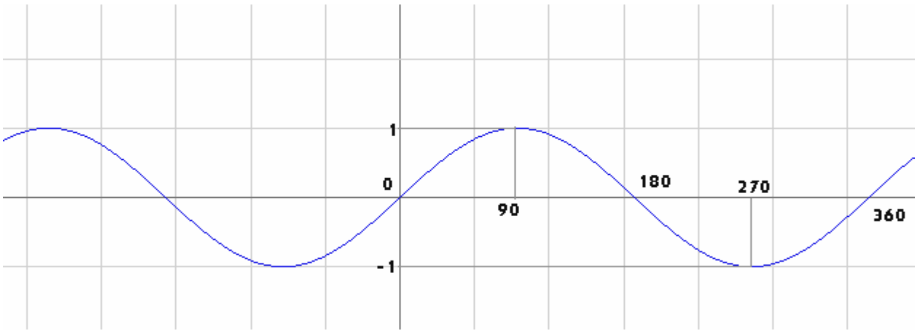
חקירת פונקציות

פונקצית סינוס (sin)

$$y = \sin x$$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

המחזור של הפונקציה הוא 360^0 או 2π רדיאנים.



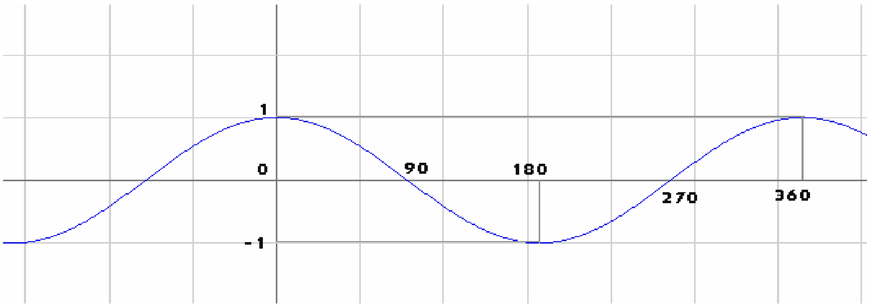
פונקציית סינוס היא פונקציה אי זוגית: $\sin(-x) = -\sin x$.

פונקציית קוסינוס (cos)

$$y = \cos x$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

המחזור של הפונקציה הוא 360^0 או 2π רדיאנים.

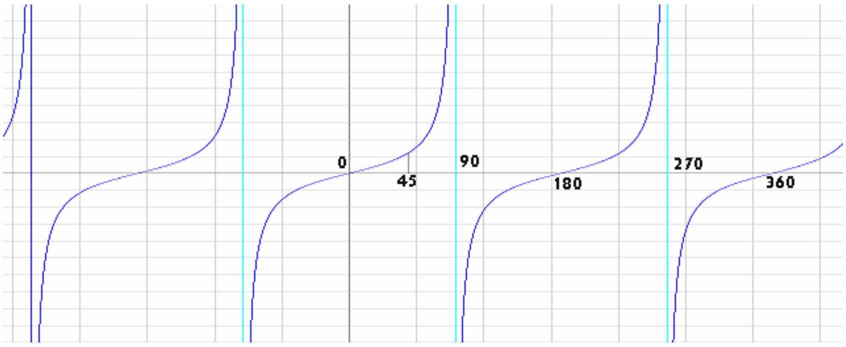


פונקציית קוסינוס היא פונקציה זוגית: $\cos(-x) = \cos x$.

פונקציית טנגס (tan)

$$y = \tan x$$

המחזור של הפונקציה הוא 180^0 או π רדיאנים.

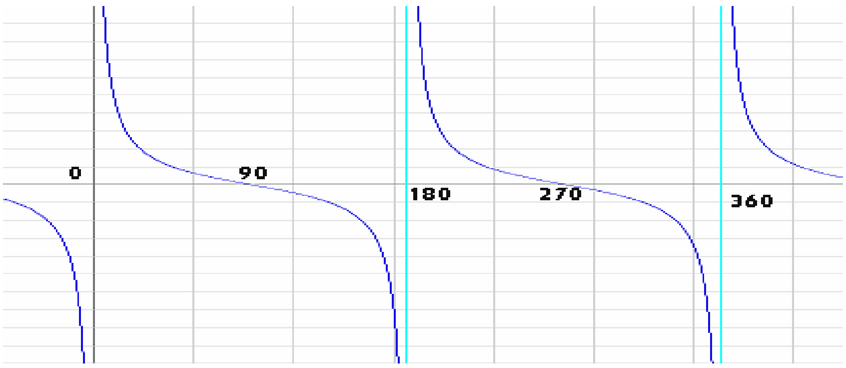


פונקציית טנגס היא פונקציה אי-זוגית: $\tan(-x) = -\tan x$.

פונקציית קוטנגס (cot)

$$y = \cot x$$

המחזור של הפונקציה הוא 180^0 או π רדיאנים.



פונקציית קו-טנגס היא פונקציה אי-זוגית: $\cot(-x) = -\cot x$.

כלי עזר: רדיאנים ומעלות

במעגל יש 360^0 או 2π רדיאנים.

על מנת להמיר בין רדיאנים ומעלות יש לכפול בנוסחא המתאימה:

מקור	יעד	נוסחא
מעלות	רדיאנים	$\frac{\pi}{180}$
רדיאנים	מעלות	$\frac{180}{\pi}$

ברדיאן אחד ישנם 57.29^0 בקירוב ($57^0 17'44"$).

במעלה אחת ישנם 0.01745^{rd} בקירוב (rd = רדיאנים).

רשימת זוויות שימושיות:

זווית במעלות	0	30	45	60	90	180	270	360
זווית ברדיאנים	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

$$\pi = 3.1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\ 5820974944...$$

טריגונומטריה דיפרנציאלית ואינטגרלית

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int (\sin x)\,dx = -\cos x + c$$
$$\int (\cos x)\,dx = \sin x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$